Universidad Iberoamericana Puebla

Repositorio Institucional **http://repositorio.iberopuebla.mx**

ExpoIbero Primavera 2022

Estudio de la propagación de energía en pila granular bidimensional

Martínez Quintanar, José Alfredo

2022

https://hdl.handle.net/20.500.11777/5525

http://repositorio.iberopuebla.mx/licencia.pdf

Estudio de la propagación de energía en pila granular bidimensional

Martínez Quintanar José Alfredo (séptimo semestre en Ingeniería Mecatrónica)[1], Ramírez Rodríguez Rocío (profesora responsable)[1], Acevedo Escalante Manuel F. (profesor asesor)[1], González Fernández Belinka. (profesora asesora)[1].
[1]*Universidad Iberoamericana Puebla, San Andrés Cholula, Puebla, México*

Resumen

Se define como medio granular al conjunto de partículas macroscópicas que interaccionan entre sí a través de fuerzas de fricción entre sus contactos, como, por ejemplo: la arena, canicas, dulces, etc. Este tipo de materiales son de principal interés a la ciencia y a la industria debido a sus comportamientos un tanto particulares, como en cuestiones de fuerzas de flotación, saturación hidrostática o cadenas de fuerza como en una pila. Una característica muy interesante de los medios granulares es la alta disipación de energía que presentan al interaccionar entre sí entre sus múltiples choques internos. El siguiente trabajo tiene como objetivo estudiar la propagación de energía en una pila granular formada por discos duros de radio R y de masa m dispuestos en un arreglo piramidal con compactación *hcp* al ser impactados con un disco de las mismas características y con una velocidad V_0. Los cálculos se realizaron tomando en cuenta que el sistema no presenta fricción y por condiciones de simetría, restringiendo el ángulo de interacción a $\pi/6$. Los resultados muestran que la propagación ocurre en los laterales del sistema mientras que las partículas internas no presentan movimiento, lo cual lleva a concluir que la propagación por condiciones específicas de simetría equilátera solo ocurre en las laterales haciendo que las secciones internas no interaccionen con el choque inicial o bien el ángulo de interacción post colisión no puede restringirse, por lo que debe ser un grado de libertad más del análisis.

Palabras clave: Materia granular, impacto, pila granular, transición de energía.
[*]**Autor Corresponsal:** alfredoquintanar.23@gmail.com

Introducción

La materia granular se define como un sistema conformado por una cantidad significativa de partículas macroscópicas, que oscilan entre 1 μm hasta varios metros de diámetro [1], en función de las fuerzas externas, este tipo de materiales pueden presentar comportamientos como sólidos, fluidos [2] y se caracterizan por ser altamente disipativos [3].

Las pilas granulares son una de las presencias más simples de estos medios formada al verter partículas en una superficie horizontal, esto provoca un montículo de forma cónica gracias a las fuerzas que se generan por la gravedad, de misma forma se genera un ángulo de reposo cuando alcanza su altura máxima, si este ángulo es rebasado se generará una avalancha y el material fluirá hacia los bordes [4]. Éstas han sido estudiadas de forma extensa en los últimos años, a pesar de que existen dentro del área de mecánica clásica se observan irregularidades en su comportamiento al ser sometidos a presión, en vez de distribuir la fuerza de forma uniforme a través de los granos que conforma el cuerpo, la distribuye hacia los lados [5], esto debido al efecto de arco que se genera en el interior del montículo.

Para explicar lo anterior, se han propuesto distintas hipótesis, como lo es la aproximación FPA (fixed principal axis), lo que intenta explicar es que las ecuaciones de los tensores de tensión tienen un eje principal que siempre señala en la misma dirección, de una forma *recordando* el momento de la formación de la pila [6]; a pesar de que no es generalmente aceptado, existen otros modelos continuos propuestos como una relación entre el tamaño de la partícula y la pila, en especial para casos de micromecánica [7]; arreglos rígidos con distintas geometrías, incluso el uso de partículas polidispersas [8]; a pesar de estos esfuerzos, los resultados obtenidos con dichas propuestas no satisface la reproducción de algún experimento relacionado con fuerzas.

El otro fenómeno que tratar en este estudio es el impacto granular, sucede cuando un objeto impacta a un sustrato granular, el medio que se encontraba como un sólido empieza a fluidizar una vez la colisión sucede, es importante aclarar que para que esto suceda el proyectil tiene que superar el esfuerzo a la fluencia del material [9].

Son eventos de interés para un gran número de procesos naturales y artificiales, gracias a su importancia en la creación y evolución de superficies. Con el afán de observar mejor los cambios, los científicos han diseñado diversos modelos de simulación numérica [10] para recrear impactos con diferentes parámetros, el más utilizado siendo el DEM (Digital Elevation Model), para poder realizarlas se debe de centrar en el choque, la rarefracción en ondas, las proporciones de evaporización y derretido, así como el crecimiento y colapso de cavidades.

Otro aspecto que se observa es la particularidad de los casos cuando se habla de propagación del impacto en sus etapas iniciales, experimentalmente se demostró que la fuerza siempre es no linear, incluso modificando aspectos como la velocidad y ancho del impactador. En velocidades moderadas la fricción de los materiales granulares genera una transmisión de fuerza no homogénea, aunque existen excepciones en el que se transmite de forma cuasilineal [11].

Es importante resaltar, que las investigaciones de este fenómeno se centran frecuentemente en la física que describe al impactador o el efecto del *jet* [12-13]; este último hace referencia al comportamiento que presenta una superficie al no estar sometida una tensión y ser impactada, provocando que parte del material salga disparado en sentido contrario en forma tubular.

Las investigaciones previas se han centrado normalmente en torno al impactador y las consecuencias que genera, creando varias incógnitas sin resolver, el objetivo de este trabajo es estudiar la propagación de energía en el medio después de una colisión, tomando de referencia una pila granular piramidal conformada por discos duros, sin fricción y con un ángulo de libertad de 30°, para generar un preámbulo de las transiciones y convergencias de momentum lineal y energía entre las capas del medio, con el fin de desarrollar un modelo matemático capaz de describir el problema en un número n de capas.

Metodología

Diseño del experimento

Considérese una superficie plana sin fricción se colocan $n(n+1)/2$ discos duros de radio *R*, y de masa *m* dispuestos en un arreglo piramidal de compactación *hcp* (hexagonal close packing). En la Fig. 1 se puede observar el arreglo piramidal que se analizará en el presente estudio. Se establece que los discos será discos duros ya que cumplen la condición expresada en Eq(1):

$$v(r) = \begin{cases} \infty, & si\ r < R \\ 0, & si\ r > R \end{cases} \qquad (1)$$

De donde *R* representa el diámetro de los discos. Este potencial implica que todos los discos en el sistema no presentan deformaciones durante el proceso de impacto, es decir que el cociente de restitución $e = 1$, lo que implica que los choques son totalmente elásticos.

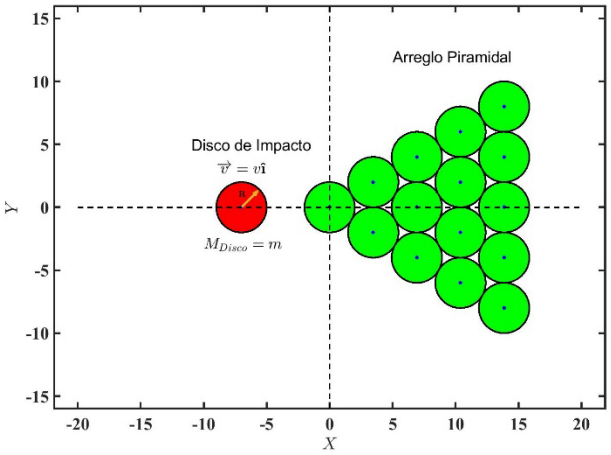

Fig. 1 Arreglo geométrico que se emplea para el análisis. Del lado derecho se puede observar el arreglo piramidal en compactación hcp y del lado derecho la partícula que impactará al conjunto piramidal.

Sea $(x_{n,p}, y_{n,p})$ la posición de la partícula p-ésima de la capa *n*–ésima. Entonces, para la construcción del arreglo piramidal considérese que la partícula inicial se coloca estratégicamente en la posición $(x_{1,1}, y_{1,1}) = (0,0)$, lo cuál corresponderá a la capa $n = 1$ y dada la geometría *hcp*, implica que los ángulos que forman las líneas de los centros que forman las partículas están a $\pi/6$ se puede llegar por inducción, que los centros de las partículas siguen la Eq(2) para la *n*-ésima capa, formada por *n* partículas:

$$\begin{cases} (x_{n,1}, y_{n,1}) = \left((n-1)\sqrt{3}, -n+1\right)R \\ (x_{n,2}, y_{n,2}) = \left((n-1)\sqrt{3}, -n+3\right)R \\ (x_{n,3}, y_{n,3}) = \left((n-1)\sqrt{3}, -n+5\right)R \\ \vdots \\ (x_{n,i}, y_{n,i}) = \left((n-1)\sqrt{3}, -n+2i-1\right)R \\ \vdots \\ (x_{n,n}, y_{n,n}) = \left((n-1)\sqrt{3}, n-1\right)R \end{cases} \qquad (2)$$

Modelos matemáticos

Para realizar el análisis se emplearán dos leyes de conservación, momentum lineal con la Eq(3) y Eq(4) y de energía Eq(5):

$$\sum_{j=1}^{s} \left(\vec{P}_0\right)^j = \sum_{j=1}^{s} \left(\vec{P}_f\right)^j \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{s} m_{n,j}\overrightarrow{v_{n,J}^{(0)}} = \sum_{j=1}^{s} m_{n,j}\overrightarrow{v_{n,J}^{(f)}} \qquad (4)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} m_{n,j}\left[V_{n,j}^{(0)}\right]^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} m_{n,j}\left[V_{n,j}^{(f)}\right]^2 \qquad (5)$$

Donde:

$m_{n,j} = m\ (conts)$

$V_{n,j}^{(0)}$=Velocidad inicial

$V_{n,j}^{(f)}$=Velocidad final

Resultados y Discusión

Los datos obtenidos por los cálculos de momentum lineal entre el impactador y la primera capa indican que existe una conservación de momentum lineal Eq(6), ya que está indicado que la velocidad inicial (previa al impacto) va a ser igual a la velocidad del primer disco después del choque.

$$\overrightarrow{V_{1,1}} = \overrightarrow{V_o} \qquad (6)$$

Entre la capa 1 y 2 se nota en el resultado de la Eq(7) que la magnitud de ambos discos es igual, indicando la simetría del sistema propuesto, además es importante remarcar que el valor posee una raíz cuadrada de 3, esto se debe a que la transmisión de la fuerza sea en un ángulo de 30° (Fig. 2.).

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_{2,1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}V_o\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \dfrac{1}{2}\hat{y}\right) \\ \overrightarrow{V_{2,2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}V_o\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \dfrac{1}{2}\hat{y}\right) \end{cases} \qquad (7)$$

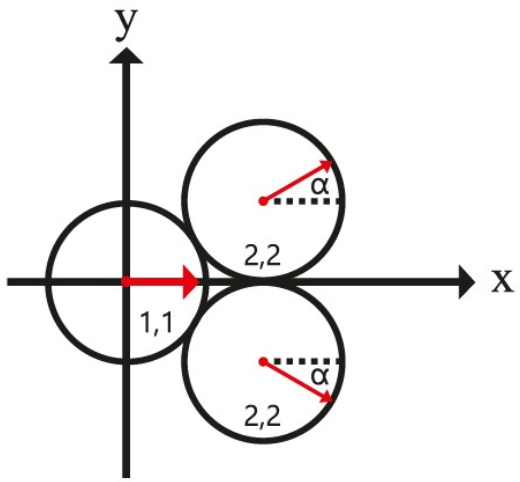

Fig. 2. Transmisión de momentum y energía entre la capa 1 y capa 2.

Entre la capa 2 y capa 3 se observa que mientras los discos exteriores o los de los bordes se siguen manteniendo en las direcciones, el disco de en medio solo se ve afectado en el eje x Eq(8), esto es explicado debido a que las fuerzas que se transmiten solo se mueven en esa dirección y carecen de componente en y (Fig. 3).

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_{3,1}} = \frac{\sqrt{3}}{15} V_o \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} \right) \\ \overrightarrow{V_{3,2}} = \frac{4}{5} V_o \, \hat{x} \\ \overrightarrow{V_{3,3}} = \frac{\sqrt{3}}{15} V_o \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{y} \right) \end{cases} \quad (8)$$

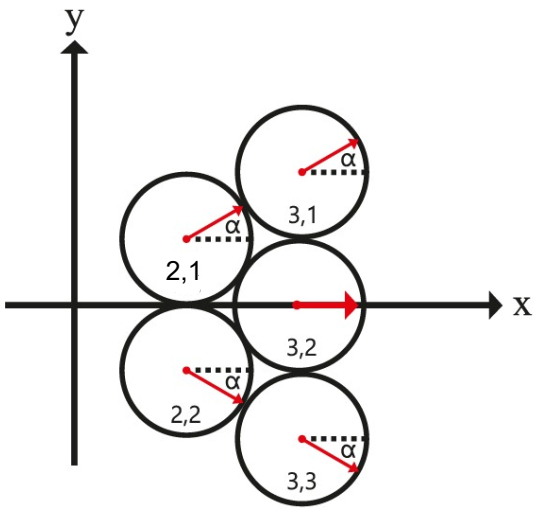

Fig. 3. Transmisión de momentum y energía entre la capa 2 y capa 3.

El impacto entre la capa 3 y 4 es de gran importancia para este estudio, ya que como se puede observar en los datos de la Eq. (9), los discos exteriores han regresado a un valor previo mientras que los discos interiores han alcanzado un punto de equilibrio y ya no permiten la transmisión de energía a través de estos (Fig. 4.).

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_{4,1}} = \frac{\sqrt{3}}{3} V_o \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} \right) \\ \overrightarrow{V_{4,2}} = 0 \\ \overrightarrow{V_{4,2}} = 0 \\ \overrightarrow{V_{4,4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} V_o \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{y} \right) \end{cases} \quad (9)$$

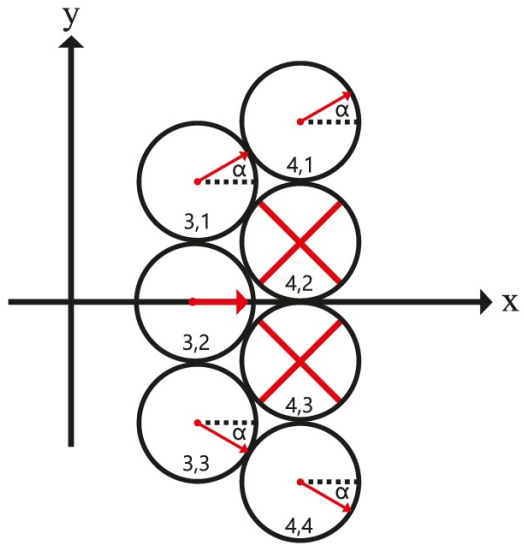

Fig. 4. Transmisión de momentum y energía entre la capa 3 y capa 4.

En la capa 4 y 5 se puede ver con claridad el patrón que está tomando la pila granular analizando sus datos Eq. (10), donde los discos interiores mantienen el equilibrio, quedando en reposo y dejando el esfuerzo del sistema en los discos exteriores (Fig. 5.)

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_{5,1}} = \frac{\sqrt{3}}{3} V_o \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} \right) \\ \overrightarrow{V_{5,2}} = 0 \, V_o \, \hat{x} \\ \overrightarrow{V_{5,3}} = 0 \, V_o \, \hat{x} \\ \overrightarrow{V_{5,4}} = 0 \, V_o \, \hat{x} \\ \overrightarrow{V_{5,5}} = \frac{\sqrt{3}}{3} V_o \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{y} \right) \end{cases} \quad (10)$$

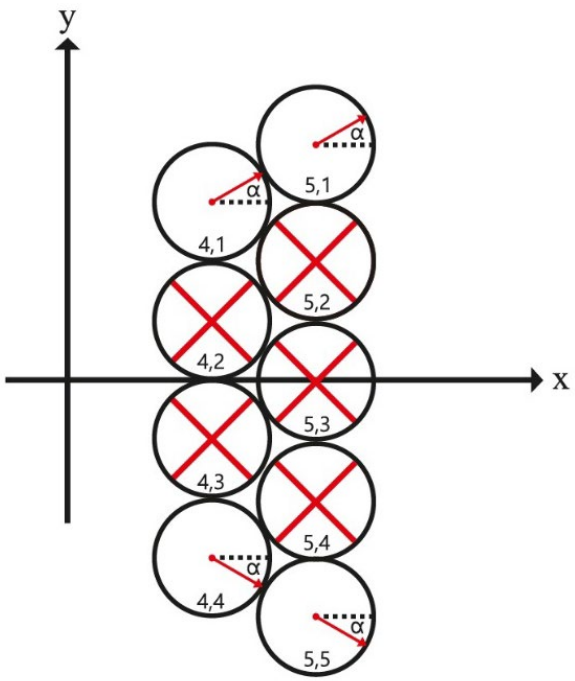

Fig. 5. Transmisión de momentum y energía entre la capa 4 y capa 5.

Después de realizar los cálculos, se obtiene que la primera capa cumple con los principios establecidos en la ley de conservación de momentum lineal y conservación de la energía Eq. (11), a partir de este punto, las siguientes capas solo propagan el momentum a través de los bordes de la pirámide (el primer y último disco de cada capa) como una constante, demostrando que los discos internos (aquellos que se encuentran entre los bordes) no permiten la propagación en el sistema Eq. (12).

$$V_o = V_{1,1} \quad ec.11$$

$$\begin{cases} Bordes = \dfrac{\sqrt{3}}{3} V_o \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} \pm \dfrac{1}{2}\hat{y} \right) \\ Internos = 0 \end{cases} \qquad ec.12$$

Conclusiones, perspectivas y recomendaciones

En conclusión, se observó que en las condiciones de alta simetría a las que se sometió la pila granular piramidal, la propagación solo ocurre en los bordes que la conforman, indicando que en la sección interna no ocurran interacciones entre los discos a causa del impacto inicial o los subsecuentes; la razón detrás de esto puede ser gracias al comportamiento natural que exhiben las pilas al ser sometidas a este tipo de esfuerzos, o bien la restricción de los grados de libertad de movimiento en la proyección de las fuerzas influyen de forma sustancial en el resultado de los choques de las partículas. De cara a futuros estudios, es conveniente realizar el análisis con ángulos que no sean fijos a través de los eventos entre capas, para brindar un grado de libertad más.

Referencias

1. J. Duran. **Sands, Powders, and Grains**. *Springer, 2000.*
2. P. Umstätter & H. M. Urbassek (2020). **Fragmentation and energy dissipation in collisions of polydisperse granular clusters**. *Astronomy & Astrophysics, 2020*. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201936527 (Activo-Marzo-de-2022)
3. H. J. Herrmann, **Granular matter**, *Physica A, 2002*. doi:10.1016/s0378-4371(02)01037-3 (Activo-Marzo-de-2022)
4. B.-B. Dai. **Probing the boundary effect in granular piles**. *Granular Matter, 2017.* doi:10.1007/s10035-017-0775-9 (Activo-Marzo-de-2022)
5. G. Oron, & H.J. Herrmann. **Exact calculation of force networks in granular piles**. *Physical Review E, 1998*. doi:10.1103/physreve.58.2079
6. Van der Meer, D. **Impact on Granular Beds.** *Annual Review of Fluid Mechanics, 2017*. doi:10.1146/annurev-fluid-010816-060213 (Activo-Marzo-de-2022)
7. Bouchaud J. P., Cates M. E., Ravi Prakash J., and Edwards, S.F. **Hysteresis and Metastability in a Continuum Sandpile Model**. *Physical Review Letters, 1995*. doi:https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.1982
8. J. Shahu, M. Madhav, & S. Hayashi. **Analysis of soft ground-granular pile-granular mat system**. *Computers and Geotechnics, 2000.* doi:10.1016/s0266-352x(00)00004-5
9. Nordstrom, K. N., Lim, E., Harrington, M., & Losert, W. **Granular Dynamics During Impact**. *Physical Review Letters, 2014*. doi:10.1103/physrevlett.112.228002 (Activo-Marzo-de-2022)
10. P.Y. Hicher. **Modelling the impact of particle removal on granular material behaviour**. *Géotechnique, 2013*. doi:10.1680/geot.11.p.020
11. A. H. Clark, A. J. Petersen, L. Kondic, & R. P. Behringer. **Nonlinear Force Propagation During Granular Impact**. *Physical Review Letters*, 2015. doi:10.1103/physrevlett.114.144502
12. Marston, J. O., & Pacheco-Vázquez, F. **Millimetric granular craters from pulsed laser ablation**. *Physical Review E, 2019.* doi:10.1103/physreve.99.030901 (Activo-Marzo-de-2022)
13. K. Wada, H. Senshu, & T. Matsui. (2006). **Numerical simulation of impact cratering on granular material**. *Icarus, 2006*. doi:10.1016/j.icarus.2005.10.002