

# Elemento finito aplicado a la estática, una alternativa para el análisis de la ingeniería aplicada

Ibáñez Juárez, Carlos R.

2015-05-08

---

<http://hdl.handle.net/20.500.11777/917>

<http://repositorio.iberopuebla.mx/licencia.pdf>

# Elemento Finito Aplicado a la Estática, una Alternativa para el Análisis de la Ingeniería Aplicada

M.Sc.A. Carlos R. Ibáñez Juárez<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Académico de Tiempo, Departamento de Ciencias e Ingeniería  
Universidad Iberoamericana – Puebla, [carlos.ibanez@iberopuebla.mx](mailto:carlos.ibanez@iberopuebla.mx)

**Abstract.** La actual complejidad sobre el diseño de los elementos constructivos (civiles, mecánicos, etc.), demanda soluciones complejas para su análisis, por lo que la inclusión de experiencias de Aplicación en Ingeniería se ha proyectado como una alternativa de alta relevancia en la formación de los estudiantes de las carreras de Ingeniería aplicada (Civil, Mecánica, Eléctrica, entre otras), para ello el Método del Elemento Finito proporciona una gran diversidad de soluciones, para problemas diversos de Ingeniería. En el presente trabajo se ha seleccionado un ejercicio de Estática para mostrar las cualidades positivas de este método numérico de solución para situaciones tradicionales y convencionales de las técnicas de diseño, análisis y construcción.

**Palabras Clave.-** Elemento Finito, Métodos Numéricos, Aplicación de la ingeniería.

**Abstract.** Nowadays, the complexity on the design of constructive elements (civil, mechanical, etc.), demand complex solutions for its analysis, so the inclusion of Application Engineering experiences is designed as an alternative of high relevance in the formation of students in the Engineering careers (Civil, Mechanical, Electrical, etc.), for these, the Finite Element Method provides a wide range of solutions to different engineering problems. In this document, I have selected a Statics exercise to show the positive qualities of this numerical method of solution for traditional and conventional situations of the design techniques, analysis and construction.

**Keywords:** Finite element, Numerical Methods, Application Engineering.

## 1 Introducción

El método del elemento finito (MEF), es un método de resolución aproximativo, el cual se utiliza principalmente en problemas en los cuales no se puede conocer la solución exacta, explicado en una forma matemática cualquiera no disponible. Dicho método está bien adoptado en la solución de problemas reales en áreas de la ingeniería. Por ejemplo, la resistencia de materiales ó

la teoría de la elasticidad pueden ser utilizados para calcular analíticamente los esfuerzos y las deformaciones en una columna a flexión, sin embargo no es posible conocer los esfuerzos que se generan en un cigüeñal de un automóvil.

La Figura 1, presenta un problema simple que se puede resolver por la Resistencia de Materiales ó por la teoría de la elasticidad.

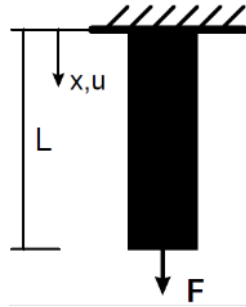


Figura 1. Problema simple, una columna sometida a tracción.

La figura 2, presenta un problema que no tiene una solución exacta y es necesaria una alternativa de

resolución aproximativa, el cual será para nuestro caso el método del elemento finito.

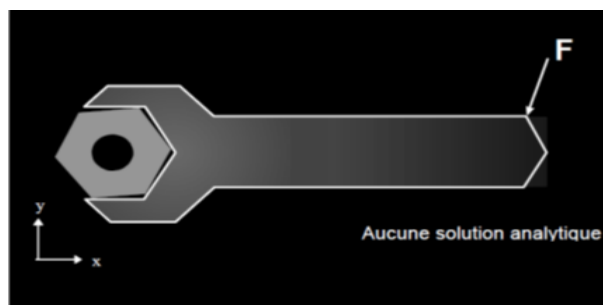


Figura 2. Llave de mano problema complejo, para el análisis de la ingeniería aplicada.

Este método implica:

- El desacoplamiento de una estructura continua en muchos elementos (ver figura 3).

- La ejemplificación del comportamiento mecánico de cada elemento en una forma simple.
- La conexión de los elementos por medio de nodos.

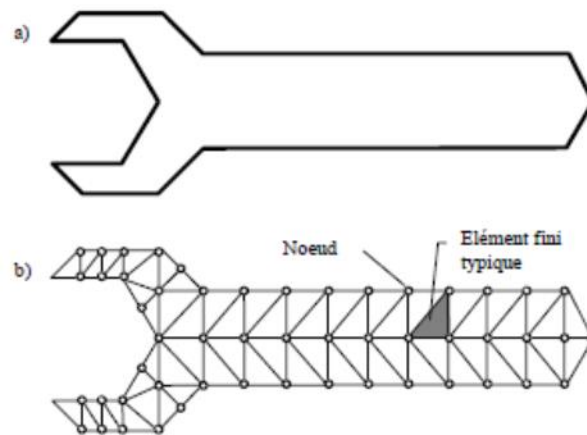


Figura 3.- a) Medio continuo b) Medio continuo cortado en triángulos (elemento finito).

Este proceso presenta un conjunto de ecuaciones algebraicas, las cuales son de equilibrio para cada uno de los nodos (ecuaciones nodales); un modelo de MEF puede presentar una centena o incluso miles de ecuaciones nodales, para su solución se utilizan cada vez más, poderosas computadoras.

Si necesitamos una descripción más sofisticada del MEF, puede ser la que se representa sobre una base de interpolaciones polinomiales, para cada parte del problema o del elemento en general. Sobre un elemento, un campo de variables (deformaciones unitarias-desplazamientos, esfuerzos – deformaciones unitarias, deformaciones unitarias planas y temperaturas) en los nodos. Conectando los elementos en forma conjunta, el campo viene a ser

interpolado sobre toda la estructura por las expresiones polinomiales que tienen los elementos. La minimización de una función en particular, como la energía total, (Método de Rayleigh-Ritz), va a generar un conjunto de ecuaciones algebraicas para los valores del campo en los nodos. Su forma matricial, de este conjunto de ecuaciones es:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (1)$$

Donde  $\{u\}$  es el vector de las incógnitas (desplazamientos en los nodos),  $\{F\}$ , es el vector de las fuerzas o cargas nodales y  $[K]$ , es la matriz de rigidez.

La principal diferencia entre el método clásico y el MEF, radica en la forma de “ver”, el dominio físico y la forma de aplicar la resolución. Los métodos clásicos consideran que el

dominio físico es un medio continuo por el cual una solución analítica a sus ecuaciones gobernantes puede ser obtenido. La solución será exacta para problemas físicos simples (una columna a tensión por ejemplo), ó una aproximación en problemas físicos semi complejos (solución por el método de Rayleigh-Ritz). Dicha solución aproximativa se obtiene por El análisis por Elemento Finito el cual lo podemos dividir en tres fases:

- 1.- El Pre-tratamiento.
- 2.- El tratamiento.
- 3.- El Post- tratamiento.

Los programas que se utilizan para resolver las ecuaciones resultantes de la aplicación del MEF, como ANSYS, COMSOL, ADINA FEMLAB, CATIA, etc; utilizan gráficas para ayudar al Pre y Post tratamiento, lo cual permite generar el mallado, definir los materiales a utilizar y las condiciones a los límites de frontera; dichos sistemas intervienen principalmente en el Pre y Post tratamiento como se ha mencionado.

La parte del tratamiento es donde se encuentran los fundamentos del MEF que serán implementados, incluyen manejo de matrices,

métodos variacionales de aproximación como el método de Rayleigh-Ritz, Galerkin, etc. El método del elemento finito es un método numérico en cual el dominio físico esta representado por una colección de dominios simples, llamados elementos finitos y que permite obtener una solución aproximada a un problema dado. integraciones numéricas, resolución de ecuaciones y ecuaciones diferenciales.

El MEF permite resolver problemas lineales o no lineales, que se relacionan con diferentes dominios de la física: estática, dinámica, fatiga, transferencia de calor, acústica, etc. Un problema estático lineal (ver figura 4) determina el campo de desplazamiento, las reacciones en los apoyos, fuerzas internas en los nodos y el campo de los esfuerzos que se presentan en una estructura mecánica sometida a cargas estáticas. Par lo cual es necesario considerar algunas hipótesis:

- a) El comportamiento elástico lineal de los materiales.
- b) Las deformaciones son pequeñas.
- c) Pequeñas rotaciones.

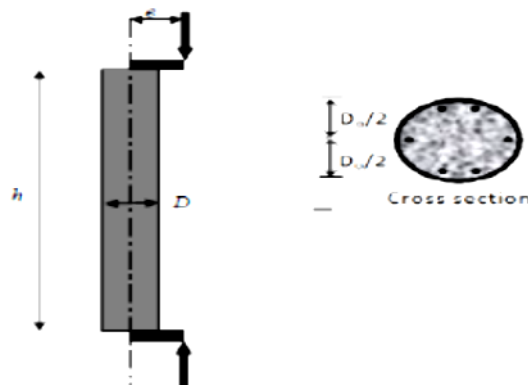


Figura 4. Presentación de una columna de concreto FPR sometida a una carga excéntrica axial con refuerzos de barras de fibra de carbono.

Un análisis típico realizado por Elemento Finito, se divide en 7 etapas, las cuales se muestran en la tabla 1.

<i>Fase I</i>	<i>Pre tratamiento</i>	<i>Etapa 1</i>	<i>Discretización espacial del dominio físico.</i>
		<i>Etapa 2</i>	<i>Definición de los materiales (Módulo de Young, Poisson)</i>
		<i>Etapa 3</i>	<i>Definición de condiciones (Geométricas y Neumann).</i>
		<i>Etapa 4</i>	<i>Definición de propiedades de la sección (aire, inercia, espesores, medio, etc.)</i>
<i>Fase II</i>	<i>Tratamiento</i>	<i>Etapa 5</i>	<i>Cálculo elemental, ensamble de ecuaciones y resolución.</i>
<i>Fase III</i>	<i>Post-Tratamiento</i>	<i>Etapa 6</i>	<i>Cálculo de las variables derivadas (deformaciones, reacciones, esfuerzos).</i>
		<i>Etapa 7</i>	<i>Análisis y visualización de resultados.</i>

## 2 Desarrollo

El resolver problemas de Ingeniería Aplicada, por medio del MEF, demanda el realizar las siguientes acciones:

### *a) Discretización*

Un elemento finito tiene dos funciones de aproximación. La primera presenta la discretización del espacio por el elemento finito del dominio físico. La segunda es sobre la interpolación nodal del campo de variables asociadas al comportamiento del dominio físico.

En este caso el campo de variables es el campo de los desplazamientos. En la discretización el escoger el elemento adecuado permitirá tener una buena aproximación, esto es conocido como el mallado del dominio los cuales son interconectados por nodos situados en las aristas de los elementos (triangulares, hexaédricos, etc.). Los elementos finitos se pueden clasificar según su geometría, las diferentes

clases de elementos pueden ser distinguidos de acuerdo a:

- En 1D: Barras, columnas rectas o curvas.
- En 2D: Placas de membranas, placas en flexión, cascos.
- En 3D: Sólidos.

Estos elementos permitirán una aproximación lineal de orden superior (cuadrática, cúbica) del dominio.

### *b) Interpolación o aproximación de las variables continuas.*

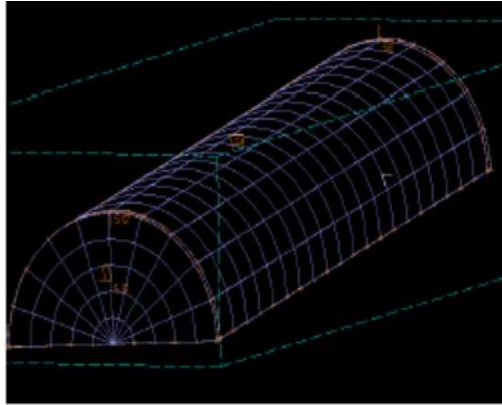
Es necesario definir para cada elemento una función aproximativa a la solución exacta. Esta función de aproximación nodal deberá de presentar las siguientes particularidades:

- a) La función no deberá de intervenir más que en las variables nodales encadenadas a los nodos situados sobre el elemento y sobre su frontera.
- b) Esta función deberá de ser continua sobre el elemento. Además el ensamble de la función de aproximación deberá de satisfacer las

condiciones de continuidad entre los diferentes elementos.

Para la discretización geométrica, las interpolaciones pueden ser lineales o

de orden superior esto dependerá de la física del problema a analizar, como ejemplo se puede apreciar la figura 5.



La figura 5.- Muestra un ejemplo de mallado aplicado a un elemento constructivo.

c) Elementos Isoparamétricos.

Normalmente, el orden de aproximación de la geometría que se escoge es equivalente al orden de la interpolación del campo de las variables. En este caso el elemento finito tiene tanto nodos geométricos como de nodos de interpolación. Dicho elemento se dice que es isoparamétrico, por ejemplo: un elemento isoparamétrico triangular con 3 nodos geométricos y 3 nodos de interpolación, utiliza una aproximación lineal para la geometría y otra aproximación lineal para el campo de variables.

d) Los Grados de Libertad

Un grado de libertad (g.d.l.), representa una condición sin restricciones, para actuar en el campo de variables del sistema. Por ejemplo:

a) Sistema masa-resorte. El campo de desplazamiento de la masa posee una variable a desplazar, el sistema tiene 1 g.d.l.

b) Cuerpo rígido. El campo de desplazamiento se compone de 3 en

traslación y 3 en rotación, por lo tanto el sistema tiene 6 g.d.l.

c) Medio Elástico Continuo. Cada elemento infinitesimal del medio tiene 3 en traslación y 3 en rotación, el medio continuo está compuesto por un número infinito de elementos infinitesimales y como consecuencia de un número infinito de g.d.l.

d) Medio elástico discretizando por elemento finito. Este se explica en términos de desplazamiento de los nodos del mallado. Por ejemplo, un mallado de 146 nodos y cada nodo tiene 2 g.d.l. Por lo tanto el modelo de elemento finito tendrá en total 292 g.d.l.

En el MEF, los g.d.l. están soportados por los nodos del mallado, discretizando el medio continuo pasamos de un número infinito a uno finito de g.d.l. siendo los desplazamientos de los nodos finitos el problema a resolver.

e) Definir los materiales y las propiedades de la sección

Dentro de las características (ver tabla 2) para asignar a un modelo de elemento finito, son las propiedades de los materiales tales como módulo

de Young, el coeficiente de Poisson; las propiedades de la sección serían espesores, momento de inercia, etc.

Tabla 2.- Ejemplo de las propiedades de los materiales, Características de las Barras de carbono del tipo PRFC							
$\phi$	US size	Type	Diámetro nominal (mm)	Sección nominal (mm <sup>2</sup> )	Módulo de Elasticidad (GPa)	Resistencia última a la tracción (MPa)	Deformación última a la tracción (%)
10	3	PRFC (Carbono)	9.525	71	207.4	1431	1.20+/-0.09

f) Condiciones de frontera

En elasticidad, tenemos básicamente dos tipos de condiciones límites: Las condiciones de cinemática o de fijación figura 6 que reaccionan sobre los desplazamientos y las condiciones

de equilibrio o cargas que actúan sobre los esfuerzos figura 7. Las cargas pueden ser de dos tipos: puntuales o repartidas que actúan directamente sobre ciertos nodos, afectando sus grados de libertad.

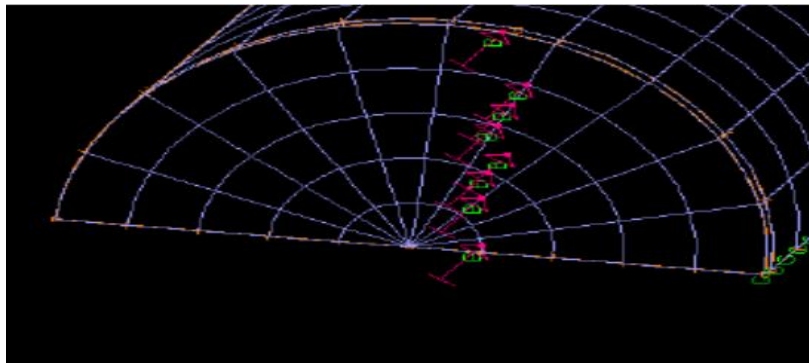


Figura 6.- Aplicación de la fuerza sobre los nodos

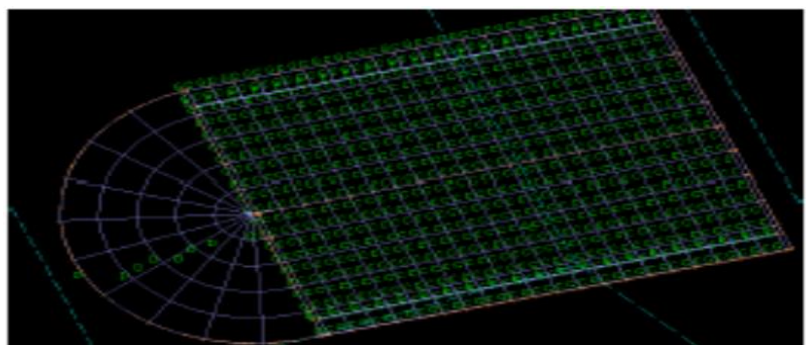




Figura.- 7 Condiciones de frontera fijación de los apoyos.

g) Cálculo de las variables derivadas  
 Estas variables derivadas son calculadas a partir de los nodos desconocidos que se determinan dentro de la resolución del modelo. En elasticidad, son deformaciones, esfuerzos y las reacciones en los soportes. Estas son como mencionamos en el principio a partir del ensamble de las ecuaciones según el método utilizado (Trabajo virtual, Energías, Rayleigh-Ritz, etc.).

h) Visualización de Resultados

Esta es la etapa final del análisis, esta normalmente se genera en forma de gráficas según el programa y el tipo de resultados que se desea obtener: Esfuerzos de Von Mises, concentración de esfuerzos, o deformaciones, etc. Un aspecto importante es la visualización de resultados y que uno deberá de juzgar si son realistas, esto nos podrá evitar resultados que podrían ser absurdos dentro de la solución de ingeniería aplicada, ver figura 8.

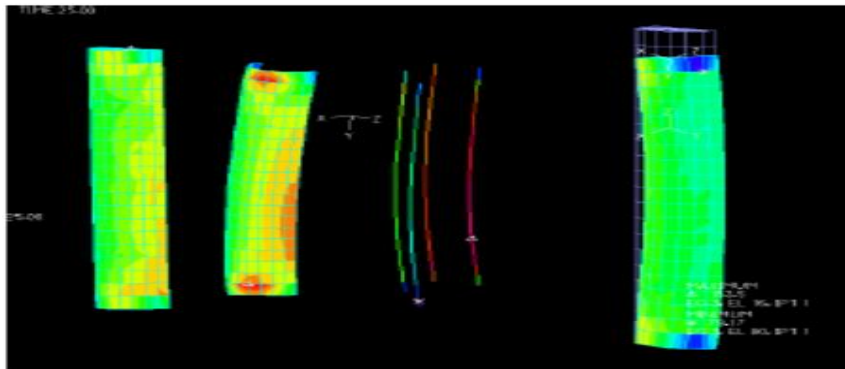


Figura 8.- Presentación de los resultados de una solución mediante interfaces visuales.

i) Modelado de un problema y la verificación de resultados  
 El modelado de un problema físico (ver figura 9) es la simulación por medio de técnicas numéricas o analíticas de su comportamiento. El

modelado requiere que un problema físico sea bien entendido afín de escoger de forma inteligente los tipos de elementos a utilizar y su cantidad requerida para que el problema físico sea representado de forma adecuada.

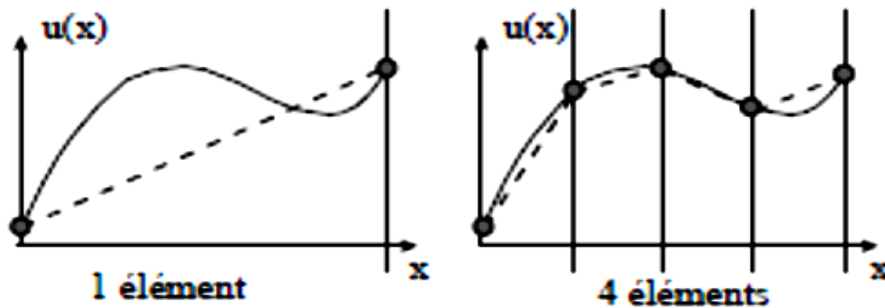


Figura 9.- Representación del modelado de un problema físico.

En un modelado por MEF, se debe de evitar los elementos de formas inadecuadas o complejas o muy grandes a fin de representar de forma correcta las variaciones rápidas e importantes de las variables. Además un mallado muy grueso dará resultados erróneos inaceptables sobre el gradiente. Por el contrario un mallado muy fino demandará más recursos del programa y la pérdida de

tiempo correspondiente y la utilización de más elementos que los indispensables para obtener los resultados adecuados, la figura 10 nos muestra las curvas de desplazamiento sobre una columna con carga excéntrica a diferentes espesores, la buena adecuación de un modelo permitirá obtener resultados tangibles, y validables.

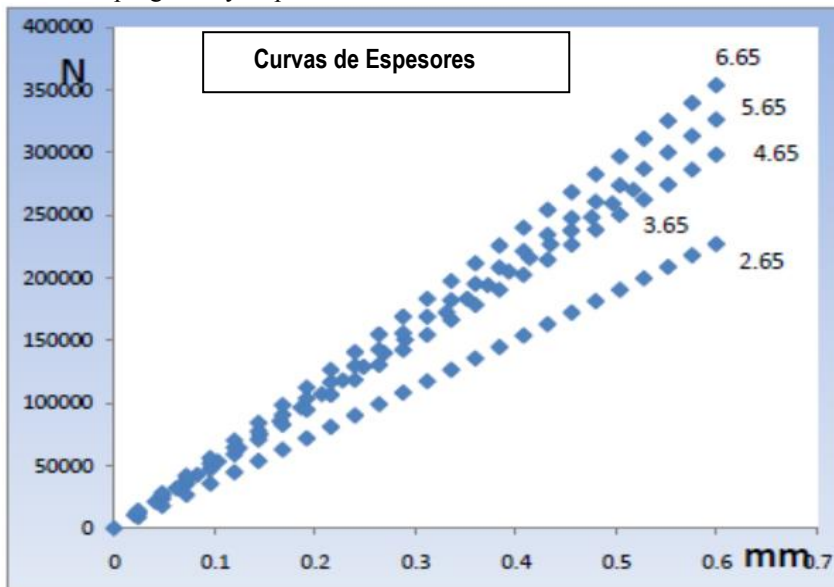
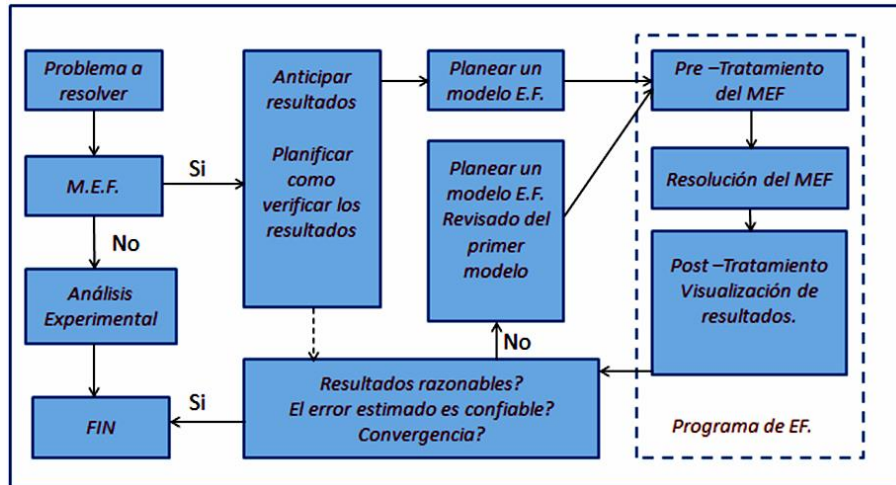


Figura 10.- Comportamiento de la columna a diferentes espesores del FPR, la gráfica presenta el desplazamiento unitario-carga aplicada.

Una vez que el programa genera los resultados habrá que verificar que los resultados sean razonables lo cual es muy importante para llegar a un buen análisis. En un análisis por Elemento Finito, la anticipación de resultados y su verificación son partes importantes para que el modelo tenga éxito. En nuestro ejemplo podemos anticipar el efecto de la fuerza excéntrica sobre la columna y la forma en que se verán

afectados los esfuerzos y los desplazamientos de las reacciones. Si existieran divergencias importantes a los resultados anticipados, sería un indicativo de una mala comprensión del problema físico; y las divergencias deberán de ser corregidas o entender una explicación lógica antes de que los resultados puedan ser juzgados de forma correcta.



### 3 Conclusiones

Un análisis realizado por un usuario típico o convencional, no tiene la necesidad de un conocimiento profundo de la matemática que se encuentra detrás del MEF, sin embargo un usuario competente deberá comprender como se comportan los elementos para tomar las decisiones adecuadas del modelo (tipo de mallado, grosor, etc.) de manera que pueda evitar malas interpretaciones e identificar los errores, y los resultados no realistas que se presentan durante el tratamiento. Él debe de comprender que el MEF es una forma de implementar una teoría matemática sobre un comportamiento físico y que trae como consecuencia la formulación de hipótesis y límites los cuales deberán de ser respetados en el análisis a realizar con el programa. Las preguntas que se deberán de responder cuando se realiza un análisis por elemento finito son:

- ¿Cuáles son los tipos de elementos a utilizar y cuántos?

- ¿Donde se deben de realizar un mallado fino y en donde uno grueso?
- ¿Puede ser simplificado el modelo?
- ¿Cuáles detalles físicos deberán de ser representados?
- ¿Qué tipo de análisis se quiere realizar (térmico, estático, dinámico, lineal, etc.)?
- ¿Como se verifica la precisión de los resultados y los errores de análisis?

La utilización del MEF en la ingeniería aplicada a permitido la simulación y análisis de diversos problemas físicos lo que han permitido generar nuevos productos o mejorar la calidad de vida, no es casualidad que este método sea considerado dentro del ciclo de vida del producto (PLM, por sus siglas en ingles) como parte fundamental de los modernos software's de Ingeniería Asistida por Computadora (CAE, por sus siglas en ingles).

### References

1. Dawe, D.J. Matrix and finite element displacement analysis of structures, Oxford Press, 1984.

2. Cook,R.D. Finite Element Modeling for stress analysis (Wiley, N.Y., 1995).
3. Imbert, J.F. Analyse des structures par elements finis (3° edition, Cepadues Edition, Toulouse, 1991).
4. Craveur, J.C. Modélisation des structures: Calcul par éléments finis (Masson, Paris , 1996).
5. Panneton Raymond et Atalla Noureddine, Notes des Cours Université de Sherbrooke, 2007.
6. Ibanez Carlos Roberto, Projet Final de Recherche par Méthodes des Éléments Finis, Université de Sherbrooke, Hiver 2010.
7. Masmoudi Radhouane, Mohamed M. Hamdy. "Axial Load Capacity of concrete filled tube FRP Tube columns: Experimental versus Theoretical Predictions". Journal of Composites for construction ASCE. (2010), 231-243.