Desarrollo de competencias inherentes al manejo del lenguaje matemático propio del cálculo tensorial

ALFREDO SANDOVAL VILLALBAZO, JOSÉ HUMBERTO MONDRAGÓN SUÁREZ

OCTAVO FORO DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS IBERO

VIERNES 21 DE SEPTIEMBRE DE 2018

Contenido

- Modelo educativo basado en competencias
- El cálculo tensorial en Ingeniería y ciencias
- Descripción del curso de análisis vectorial y tensorial en Ibero, Ciudad de México
- Ejemplo ilustrativo del desarrollo de competencias en el aula (metodologías exitosas)
- Consideraciones finales: la necesidad de priorizar la formación básica de los estudiantes en las áreas de ingeniería y ciencias

Modelo educativo basado en competencias

- Un estudiante formado a partir de un modelo basado en competencias posee una combinación de destrezas, conocimientos, aptitudes y actitudes suficiente para generar un capital cultural, social y humano que garantiza la participación ciudadana exitosa (Dirección General de Educación y Cultura de la Comisión Europea, 2004).
- El enfoque educativo por Competencias conlleva a una movilización de los conocimientos, a una integración de los mismos de manera holística y un ligamen con el contexto, asumiendo que la gente aprende mejor si tiene una visión global del problema que requiere enfrentar (Feito, 2008).
- El establecimiento de ecuaciones covariantes utilizando un lenguaje tensorial proporciona una descripción fina, profunda y rigurosa del cosmos a gran escala que prevalece cuando se consideran fenómenos cotidianos.

El cálculo tensorial en Ingeniería y ciencias

- Existe un exceso de información y alta densidad de contenidos en las materias especializadas
- Situación que obliga a la enseñanza actual de las matemáticas aplicadas a la ingeniería a realizarla vía "formulazo".
- El enfoque tensorial permite y facilita la identificación de invariantes y de propiedades de covariancia de las variables físicas permitiendo establecer ecuaciones fundamentales aplicables a la mecánica, la hidrodinámica, el electromagnetismo, la gravitación y la física atómica.

Descripción del curso de análisis vectorial y tensorial en Ibero, Ciudad de México

- Repaso obligado de Cálculo II (cálculo diferencial e integral de varias variables): este curso debe modernizarse.
- Curvas, superficies, transformaciones de coordenadas y operadores diferenciales utilizando Mathematica. Los estudiantes deben tener espacio para manipular parámetros y aprovechar la tecnología disponible.
- Invariantes (tensores de orden cero): ejemplos y contraejemplos.
- Tensores de primero y segundo rango y su aplicación en la teoría electromagnética: análisis de problemas conceptuales.
- Tensor métrico, símbolos de Christoffel, geodésicas, derivación covariante y operadores diferenciales.
- Aplicaciones selectas: teoría cinética, relatividad general y/o elementos básicos de cosmología.

Ejemplo ilustrativo

- Conductividad térmica de un gas diluido, monocomponente.

$$\rho\, c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

Ecuación de conducción de calor.

¿Cómo determinar κ a partir de primeros principios?

- El mapa conceptual requiere de bases y del uso del lenguaje matemático.

$$<\psi> = \frac{1}{n}\int \psi f\, d\vec{v}$$

Promedio estadístico

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = J\,(f f')$$

Ecuación de Boltzmann en ausencia de fuerzas

Ejemplo ilustrativo (continuación)

-La ecuación de Boltzmann permite establecer un sistema de ecuaciones capaz de describir la evolución espacio temporal de las variables termodinámicas locales.

-El concepto de "ecuación maestra" puede aplicarse a otros contextos.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n < \frac{1}{2} m v^2 >\right) + \nabla . \left(n < \frac{1}{2} m v^2 \vec{v} >\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n \epsilon) + \nabla . \left(\vec{q}\right) = 0$$

La deducción a partir de primeros principios permite identificar las limitaciones del modelo. No basta "platicar la historia", es necesario mostrar las matemáticas.

Ejemplo ilustrativo (continuación)

$$\vec{q} = n < \frac{1}{2} m v^2 \vec{v} >$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2} m \int f v^2 \vec{v} \, d\vec{v}$$

Flujo de calor

$$f^{(o)} (\vec{v}) = e^{-\frac{m v^2}{2 k T}}$$

$$f = f^{(o)} (\vec{v}) - \tau \left(-\frac{5}{2} + \frac{m v^2}{2 k T} \right) \frac{\nabla T}{T} . \vec{v}$$

Función de distribución a primer orden en los gradientes.

$$\vec{q} = \frac{1}{2} m n \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \tau \int e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} \left(-\frac{5}{2} + \frac{m v^2}{2 k T} \right) \left(\frac{\nabla T}{T} . \vec{v} \right) v^2 \, d\vec{v}$$

$$d\vec{v} = 4 \pi v^2 dv$$

En este punto se suele introducir “la respuesta”:

$$\vec{q} = -\left(\frac{5}{2} \frac{n k^2 T}{m} \tau \right) \nabla T$$

Se requiere del “paso de la muerte”

Ejemplo ilustrativo (final)

El cálculo tensorial facilita la manipulación simbólica correspondiente al cálculo de la conductividad térmica.

$$\int e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} \left(-\frac{5}{2} + \frac{m v^2}{2 k T}\right) \left(\frac{\nabla T}{T} . \vec{v}\right) \vec{v}\, v^2\, d\vec{v} = \int e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} \left(-\frac{5}{2} + \frac{m v^2}{2 k T}\right) \left(\frac{T_{,a}}{T} . v^a\right) v^b\, v^2\, d\vec{v}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} \left(-\frac{5}{2} + \frac{m v^2}{2 k T}\right) \left(\frac{T_{,a}}{T}\right) \delta^{a b}\, v^6\, dv$$

$$\kappa = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{m}{2}\right) n \left(\frac{m}{2 \pi k T}\right)^{3/2} \frac{\tau}{T} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} \left(-\frac{5}{2} + \frac{m v^2}{2 k T}\right) v^6\, dv = \frac{5}{2} \frac{n k^2 T}{m} \tau$$

Nota:

$$\left(\frac{4\pi}{3}\right) \left(\frac{m}{2}\right) n \left(\frac{m}{2 \pi k T}\right)^{3/2} \frac{\tau}{T} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} \left(-\frac{5}{2} + \frac{m v^2}{2 k T}\right) v^6\, dv$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{5 k^2 n T \tau}{2 m}, \text{Re}\left[\frac{m}{k T}\right] > 0\right]$$

Consideraciones finales

- Los problemas motivan los contenidos: el enfoque por competencias aplica en los "cursos avanzados".

- Unificar conceptos que aparecen en la vida real, utilizando un lenguaje matemático apropiado, estimula el desarrollo de la competencia de liderazgo intelectual (dimensión profesional).

- Los elementos incluidos en este tipo de cursos favorecen al desarrollo de la interdisciplina. La competencias de comunicación y trabajo en equipo se desarrollan a partir de la ejecución de proyectos motivados por los contenidos de esta materia y que pueden vincularse con experiencias significativas.

- El desarrollo de proyectos vinculados con el cálculo tensorial facilita la implementación de actividades cercanas al contexto del estudiante, con ello el alumno se acerca a la investigación y al descubrimiento.

¡Muchas gracias!